

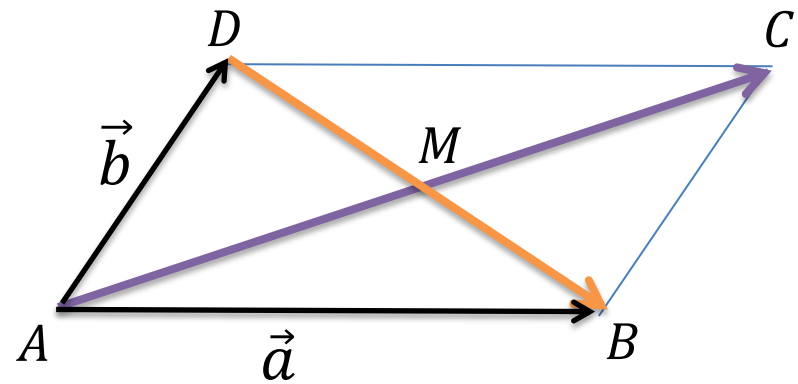
极化恒等式



如图, 设 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, 则 $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$, $\overrightarrow{DB} = \vec{a} - \vec{b}$,

$$|\overrightarrow{AC}|^2 = (\vec{a} + \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 \quad (1)$$

$$|\overrightarrow{DB}|^2 = (\vec{a} - \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 \quad (2)$$



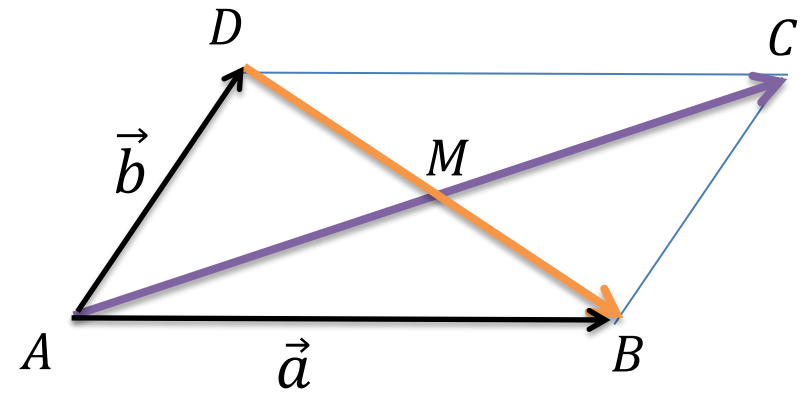
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{4} \left[(\vec{a} + \vec{b})^2 - (\vec{a} - \vec{b})^2 \right] \quad \text{——极化恒等式}$$

几何意义: 向量的数量积表示为以这组向量为邻边的平行四边形的“和对角线”与

“差对角线”平方差的 $\frac{1}{4}$. 即: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{4} \left[|\overrightarrow{AC}|^2 - |\overrightarrow{DB}|^2 \right]$

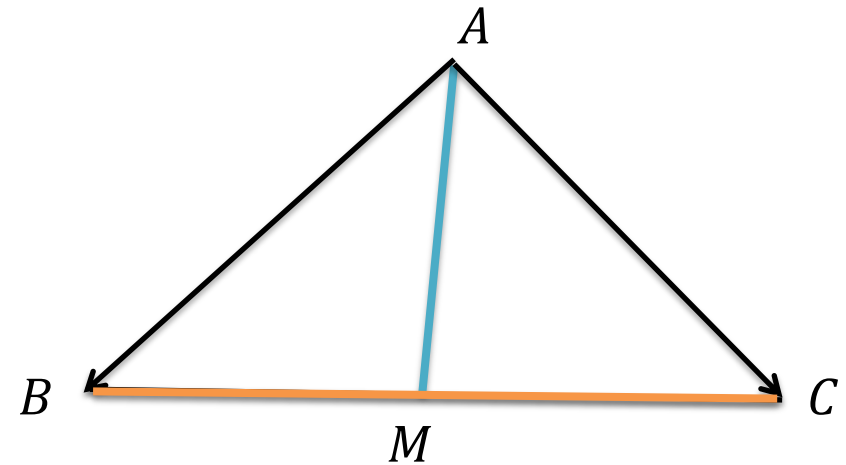
平行四边形中的极化恒等式

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= \frac{1}{4} \left[|\overrightarrow{AC}|^2 - |\overrightarrow{DB}|^2 \right] \\ &= |\overrightarrow{AM}|^2 - \frac{1}{4} |\overrightarrow{DB}|^2\end{aligned}$$



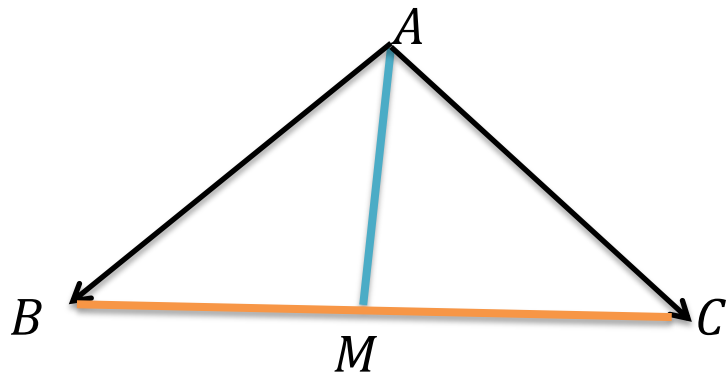
三角形中的极化恒等式

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AM}|^2 - \frac{1}{4} |\overrightarrow{BC}|^2$$



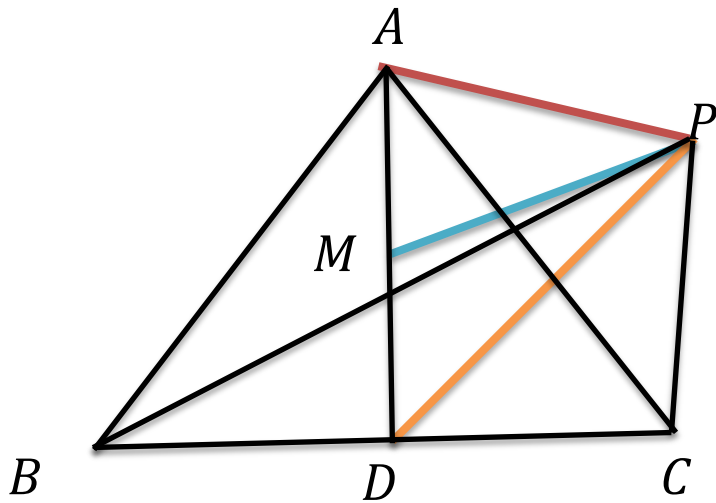
题目中对夹角一无所知，给出**中线**或**对边的长**

(2012·浙江卷)在 $\triangle ABC$ 中, M 是 BC 的中点, $AM = 3, BC = 10$,
则 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \underline{\underline{-16}}$



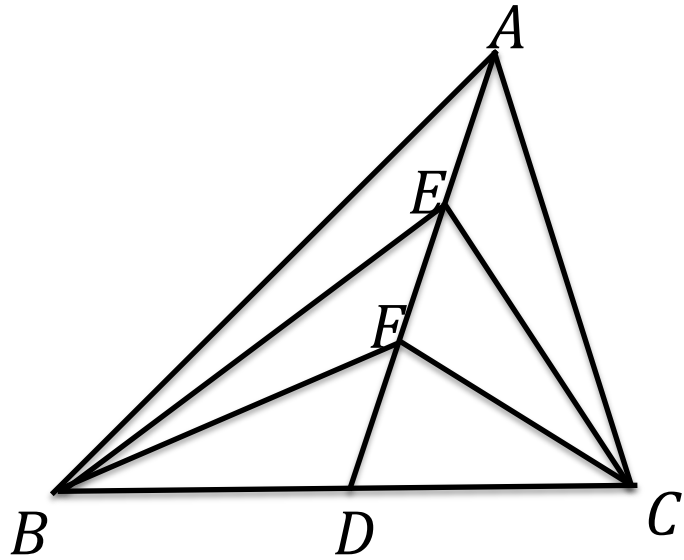
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= |\overrightarrow{AM}|^2 - \frac{1}{4}|\overrightarrow{BC}|^2 \\ &= 9 - 25 = -16\end{aligned}$$

(2017·新课标2) 已知 $\triangle ABC$ 是边长为2的等边三角形,
 P 为平面 ABC 内的一点, $\overrightarrow{PA} \cdot (\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC})$ 的最小值。



$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{PA} \cdot (\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}) &= \overrightarrow{PA} \cdot 2\overrightarrow{PD} = 2\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PD} \\
 &= 2(\overrightarrow{PM}^2 - \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}^2) \\
 &= 2(\overrightarrow{PM}^2 - \frac{3}{4}) \\
 &\geq 2(0 - \frac{3}{4}) = -\frac{3}{2}
 \end{aligned}$$

2. (2016·江苏) 如图, 在三角形 ABC 中, D 是 BC 的中点, E, F 是 AD 的两个三等分点, $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CA} = 4$, $\overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{CF} = -1$, 则 $\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{CE} = \underline{\underline{\frac{7}{8}}}$



(2018 天津) 如图, 在平面四边形 $ABCD$ 中, $AB \perp BC$, $AD \perp CD$, $\angle BAD=120^\circ$, $AB=AD=1$. 若点 E 为边 CD 上的动点, 则 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BE}$ 的最小值为 ()

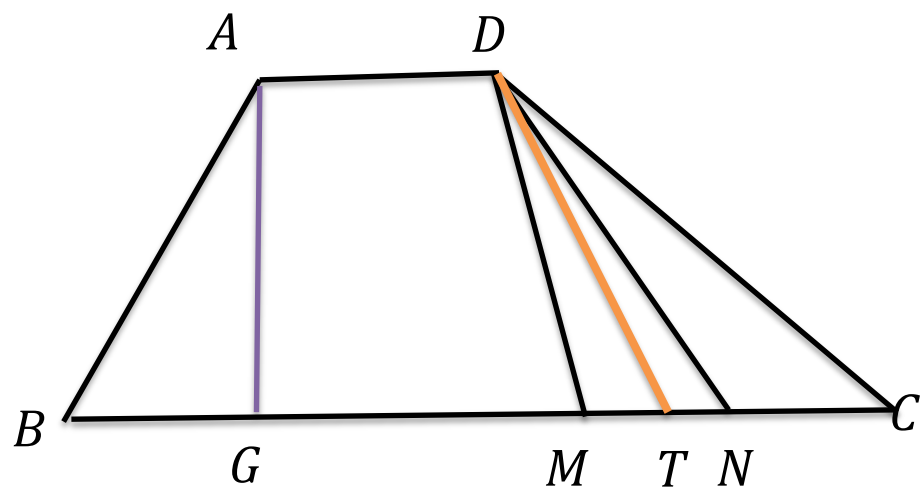
A. $\frac{21}{16}$

B. $\frac{3}{2}$

C. $\frac{25}{16}$

D. 3

(2020·天津) 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $\angle B = 60^\circ$, $AB = 3$, 且 $\overrightarrow{AD} = \lambda \overrightarrow{BC}$, 若 M, N 是线段 BC 上的动点, 且 $|\overrightarrow{MN}| = 1$, 则 $\overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{DN}$ 的最小值为 $\frac{13}{2}$



$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{DN} &= |\overrightarrow{DT}|^2 - \frac{1}{4} |\overrightarrow{MN}|^2 \\
 &= |\overrightarrow{DT}|^2 - \frac{1}{4} \\
 &\geq |\overrightarrow{AG}|^2 - \frac{1}{4} = \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

三角形“四心”与奔驰定理的关系



奔驰定理

已知 O 是 $\triangle ABC$ 内的一点, $\triangle BOC, \triangle AOC, \triangle AOB$ 的面积分别为 S_A, S_B, S_C

$$\text{则 } S_A \cdot \overrightarrow{OA} + S_B \cdot \overrightarrow{OB} + S_C \cdot \overrightarrow{OC} = \vec{0}$$

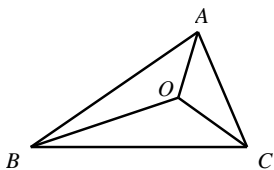
推论: O 是 $\triangle ABC$ 内的一点, 且 $x \cdot \overrightarrow{OA} + y \cdot \overrightarrow{OB} + z \cdot \overrightarrow{OC} = \vec{0}$, 则

$$S_{\triangle BOC} : S_{\triangle COA} : S_{\triangle AOB} = x : y : z$$

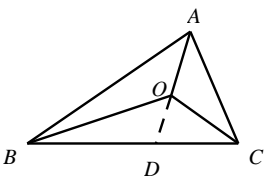
已知 O 是 $\triangle ABC$ 内的一点, $\triangle BOC, \triangle AOC, \triangle AOB$ 的面积分别为 S_A, S_B, S_C , 求证:

$$S_A \cdot \vec{OA} + S_B \cdot \vec{OB} + S_C \cdot \vec{OC} = \vec{0}$$

证明:



图一



图二

如图二 延长AO与BC边相交于点D

$$\frac{BD}{DC} = \frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ACD}} = \frac{S_{\triangle BOD}}{S_{\triangle COD}} = \frac{S_{\triangle ABD} - S_{\triangle BOD}}{S_{\triangle ACD} - S_{\triangle COD}} = \frac{S_C}{S_B}$$

$$\therefore \vec{OD} = \frac{DC}{BC} \vec{OB} + \frac{BD}{BC} \vec{OC}$$

$$\therefore \vec{OD} = \frac{S_B}{S_B + S_C} \vec{OB} + \frac{S_C}{S_B + S_C} \vec{OC}$$

$$\therefore \frac{OD}{OA} = \frac{S_{BOD}}{S_{BOA}} = \frac{S_{COD}}{S_{COA}} = \frac{S_{BOD} + S_{COD}}{S_{BOA} + S_{COA}} = \frac{S_A}{S_B + S_C}$$

$$\therefore \vec{OD} = -\frac{S_A}{S_B + S_C} \vec{OA}$$

$$-\frac{S_A}{S_B + S_C} \vec{OA} = \frac{S_B}{S_B + S_C} \vec{OB} + \frac{S_C}{S_B + S_C} \vec{OC}$$

$$\therefore S_A \cdot \vec{OA} + S_B \cdot \vec{OB} + S_C \cdot \vec{OC} = \vec{0}$$

由此定理可得三角形四心向量式

O 是 $\triangle ABC$ 的重心

$$S_{\triangle BOC} : S_{\triangle COA} : S_{\triangle AOB} = 1:1:1 \Leftrightarrow \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{0}$$

O 是 $\triangle ABC$ 的内心

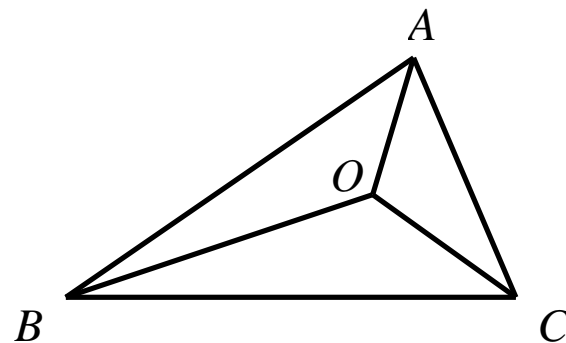
$$S_{\triangle BOC} : S_{\triangle COA} : S_{\triangle AOB} = a:b:c \Leftrightarrow a \cdot \vec{OA} + b \cdot \vec{OB} + c \cdot \vec{OC} = \vec{0}$$

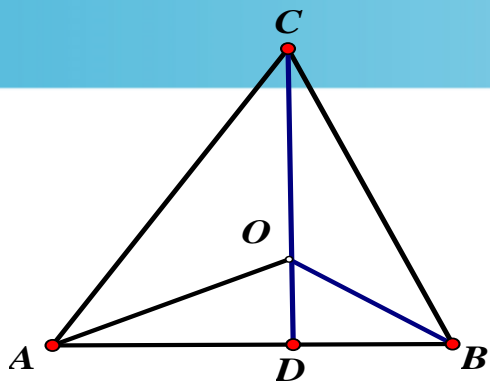
O 是 $\triangle ABC$ 的外心

$$S_{\triangle BOC} : S_{\triangle COA} : S_{\triangle AOB} = \sin 2A : \sin 2B : \sin 2C \Leftrightarrow \sin 2A \cdot \vec{OA} + \sin 2B \cdot \vec{OB} + \sin 2C \cdot \vec{OC} = \vec{0}$$

O 是 $\triangle ABC$ 的垂心

$$S_{\triangle BOC} : S_{\triangle COA} : S_{\triangle AOB} = \tan A : \tan B : \tan C \Leftrightarrow \tan A \cdot \vec{OA} + \tan B \cdot \vec{OB} + \tan C \cdot \vec{OC} = \vec{0}$$





证明：如图 O 为三角形的垂心， $\tan A = \frac{CD}{AD}$ ， $\tan B = \frac{CD}{DB} \Rightarrow \tan A : \tan B = DB : AD$

$$S_{\triangle BOC} : S_{\triangle COA} = DB : AD$$

$$\therefore S_{\triangle BOC} : S_{\triangle COA} = \tan A : \tan B$$

同理得 $S_{\triangle COA} : S_{\triangle AOB} = \tan B : \tan C$ ， $S_{\triangle BOC} : S_{\triangle AOB} = \tan A : \tan C$

$$\therefore S_{\triangle BOC} : S_{\triangle COA} : S_{\triangle AOB} = \tan A : \tan B : \tan C$$

◆ 例 1 已知 O 是 $\triangle ABC$ 内部一点, 满足 $\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} + m\overrightarrow{OC} = \vec{0}$, $\frac{S_{\triangle AOB}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{4}{7}$, 则实数 $m =$ ()

- A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

【秒解】由奔驰定理可知: $S_{\triangle OBC} \overrightarrow{OA} + S_{\triangle OAC} \overrightarrow{OB} + S_{\triangle OAB} \overrightarrow{OC} = \vec{0}$,

又 $\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} + m\overrightarrow{OC} = \vec{0}$,

$$\therefore S_{\triangle OBC} : S_{\triangle OAC} : S_{\triangle OAB} = 1 : 2 : m,$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle AOB}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{m}{1+2+m} = \frac{4}{7}, \therefore m = 4, \text{ 选 C.}$$

◆ 例2 已知 O 是 $\triangle ABC$ 内部一点, 满足 $\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB} + 5\overrightarrow{OC} = \vec{0}$, 则 $\triangle ABC$ 的面积与 $\triangle AOC$ 的面积之比为_____.

【秒解】由奔驰定理可知:

$$S_{\triangle OBC} : S_{\triangle OAC} : S_{\triangle OAB} = 1 : 3 : 5,$$

3

$$\therefore \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle AOC}} = \frac{1+3+5}{3} = 3$$

◆ 例 3 (2016 清华领军计划自主招生 27 题) 已知 O 是 $\triangle ABC$ 内一点, 若 $S_{\triangle AOB} : S_{\triangle BOC} : S_{\triangle AOC} = 4 : 3 : 2$,

设 $\overrightarrow{AO} = \lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AC}$, 则实数 λ 和 μ 的值分别为 ()

- A. $\frac{2}{9}, \frac{4}{9}$ B. $\frac{4}{9}, \frac{2}{9}$ C. $\frac{1}{9}, \frac{2}{9}$ D. $\frac{2}{9}, \frac{1}{9}$

【秒解】 $\overrightarrow{AO} = \lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{AO} = \lambda (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) + \mu (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA})$

$$\lambda (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) + \mu (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}) = \lambda \overrightarrow{OB} + \mu \overrightarrow{OC} - (\lambda + \mu) \overrightarrow{OA} = \vec{0}$$

又 $S_{\triangle AOB} : S_{\triangle BOC} : S_{\triangle AOC} = 4 : 3 : 2$, 根据奔驰定理得: $(1 + \lambda + \mu) : (-\lambda) : (-\mu) = 3 : 2 : 4$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{2}{9}, \mu = \frac{4}{9}, \text{选 A.}$$

◆ 例 4 已知 P 为 $\triangle ABC$ 内一点, 且满足 $|PB|=2$,

$|PA|=2$, $\angle APB = \frac{5\pi}{6}$, 且 $2\overrightarrow{PA} + 3\overrightarrow{PB} + 4\overrightarrow{PC} = \vec{0}$, 则 $\triangle ABC$ 的面积为 ()

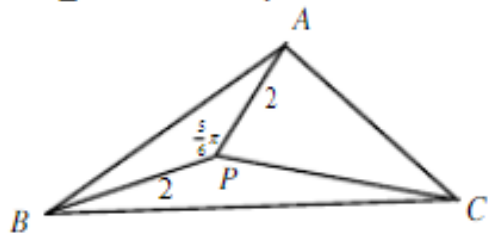
- A. $\frac{9}{8}$ B. $\frac{4}{3}$ C. 1 D. $\frac{6}{5}$

【秒解】由条件可知: $S_{\triangle PAB} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \sin \frac{5}{6}\pi = 1$,

又由奔驰定理可知: $S_{\triangle PBC} \overrightarrow{PA} + S_{\triangle PAC} \overrightarrow{PB} + S_{\triangle PAB} \overrightarrow{PC} = \vec{0}$

$$\therefore S_{\triangle PBC} : S_{\triangle PAC} : S_{\triangle PAB} = 2 : 3 : 4$$

$\therefore S_{\triangle PBC} = \frac{1}{2}$, $S_{\triangle PAC} = \frac{3}{4}$, $S_{\triangle PAB} = 1$, $S_{\triangle ABC} = \frac{9}{4}$, 选 A.



◆ 例5 若 $\triangle ABC$ 内接于以 O 为圆心, 以 1 为半径的圆, 且 $3\overrightarrow{OA} + 4\overrightarrow{OB} + 5\overrightarrow{OC} = \vec{0}$, 则该 $\triangle ABC$ 的面积为 _____. 【秒】

解】 $3\overrightarrow{OA} + 4\overrightarrow{OB} + 5\overrightarrow{OC} = \vec{0}$

$$\Rightarrow 3\overrightarrow{OA} + 4\overrightarrow{OB} = -5\overrightarrow{OC} \Rightarrow (3\overrightarrow{OA} + 4\overrightarrow{OB})^2 = (-5\overrightarrow{OC})^2 \Rightarrow 9 + 16 + 24 \cos AOB = 25 \Rightarrow \cos AOB = 0 \Rightarrow \angle AOB = 90^\circ$$

$$\Rightarrow S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2}$$

又由奔驰定理可知: $S_{\triangle OBC} \overrightarrow{OA} + S_{\triangle OAC} \overrightarrow{OB} + S_{\triangle OAB} \overrightarrow{OC} = \vec{0}$

又 $3\overrightarrow{OA} + 4\overrightarrow{OB} + 5\overrightarrow{OC} = \vec{0}$

$$\therefore S_{\triangle OBC} : S_{\triangle OAC} : S_{\triangle OAB} = 3 : 4 : 5$$

$$\therefore S_{\triangle PBC} = \frac{3}{10}, S_{\triangle PAC} = \frac{2}{5}, S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2}, S_{\triangle ABC} = \frac{6}{5}.$$

◆例 6 已知 P 是 $\triangle ABC$ 内部一点, 满足 $\overrightarrow{AP} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$, 则 $\frac{S_{\triangle ABP}}{S_{\triangle ABC}} =$ _____. 【秒解】

$$\overrightarrow{AP} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$$

$$\Rightarrow -\overrightarrow{PA} = \frac{2}{5}(\overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PA}) + \frac{1}{5}(\overrightarrow{PC} - \overrightarrow{PA}) \Rightarrow \frac{2}{5}\overrightarrow{PA} + \frac{2}{5}\overrightarrow{PB} + \frac{1}{5}\overrightarrow{PC} = \vec{0}$$

又由奔驰定理可知: $S_{\triangle PBC}\overrightarrow{PA} + S_{\triangle PAC}\overrightarrow{PB} + S_{\triangle PAB}\overrightarrow{PC} = \vec{0}$

$$\therefore S_{\triangle PBC} : S_{\triangle PAC} : S_{\triangle PAB} = \frac{2}{5} : \frac{2}{5} : \frac{1}{5}$$

$$\frac{S_{\triangle ABP}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{2}{5} + \frac{2}{5} + \frac{1}{5}} = \frac{1}{5}$$

综合运用

练 1、O 是平面上一定点，A、B、C 是平面上不共线的三个点，动点 P 满足

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \lambda \left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} + \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|} \right), \lambda \in [0, +\infty). \text{ 则 P 的轨迹一定通过 } \triangle ABC \text{ 的 ()}.$$

- A. 外心 B. 内心 C. 重心 D. 垂心

分析 已知等式即 $\overrightarrow{AP} = \lambda \left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} + \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|} \right)$ ，设 $\overrightarrow{AE} = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$ ， $\overrightarrow{AF} = \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$ ，显然

\overrightarrow{AE} ， \overrightarrow{AF} 都是单位向量，以二者为邻边构造平行四边形，则结果为菱形，故 AP 为 $\angle ABC$ 的平分线，选 B.

练 2、 $\triangle ABC$ 的外接圆的圆心为 O ，两条边上的高的交点为 H ， $\overrightarrow{OH} = m(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$ ，则实数 $m =$ _____.

分析：本题除了利用特殊三角形求解外，纯粹利用向量知识推导则比较复杂，更加重要的一点是缺乏几何直观. 解法如下，由已知，有向量等式 $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ ，将其中的向量分解，向已知等式形式靠拢，有 $(\overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OA}) \cdot (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}) = 0$ ，将已知代入，有 $[m(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) - \overrightarrow{OA}] \cdot (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}) = 0$ ，即 $m(\overrightarrow{OC}^2 - \overrightarrow{OB}^2) + (m-1)\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ ，由 O 是外心，得 $(m-1)\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ ，由于 $\triangle ABC$ 是任意三角形，则 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BC}$ 不恒为 0，故只有 $m=1$ 恒成立.

或者，过点 O 作 $OM \perp BC$ 与 M ，则 M 是 BC 的中点，有 $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$ ； H 是垂心，则 $AH \perp BC$ ，故 \overrightarrow{AH} 与 \overrightarrow{OM} 共线，设 $\overrightarrow{AH} = k\overrightarrow{OM}$ ，则 $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{OA} + \frac{k}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$ ，又 $\overrightarrow{OH} = m(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$ ，故可得 $(m-1)\overrightarrow{OA} + (m - \frac{k}{2})\overrightarrow{OB} + (m - \frac{k}{2})\overrightarrow{OC} = 0$ ，有 $m-1 = m - \frac{k}{2} = 0$ ，得 $m=1$.

练 3、点 O 是三角形 ABC 所在平面内的一点, 满足 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA}$,

则点 O 是 $\triangle ABC$ 的 ().

- A. 三个内角的角平分线的交点 B. 三条边的垂直平分线的交点
C. 三条中线的交点 D. 三条高的交点

分析 移项后不难得出, $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{CB} = \vec{0}$, 点 O 是 $\triangle ABC$ 的垂心, 选 D .

练 4 已知 O 为 $\triangle ABC$ 所在平面内一点，满足 $|\overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2 = |\overrightarrow{OB}|^2 + |\overrightarrow{CA}|^2 = |\overrightarrow{OC}|^2 + |\overrightarrow{AB}|^2$ ，则 O 为 $\triangle ABC$ 的_____心.

分析 将 $|\overrightarrow{BC}|^2 = (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB})^2 = \overrightarrow{OC}^2 + \overrightarrow{OB}^2 - 2\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OB}$ ， $|\overrightarrow{CA}|^2, |\overrightarrow{AB}|^2$ 也类似展开代入，已知等式与例 4 的条件一样. 也可移项后，分解因式合并化简， O 为垂心.

练5 在 $\triangle ABC$ 内求一点 P ，使 $AP^2 + BP^2 + CP^2$ 最小.

分析 如图2，构造向量解决. 取 $\overrightarrow{CA} = \vec{a}, \overrightarrow{CB} = \vec{b}$ 为基向量，设 $\overrightarrow{CP} = \vec{x}$ ，有 $\overrightarrow{AP} = \vec{x} - \vec{a}, \overrightarrow{BP} = \vec{x} - \vec{b}$.

于 是 ，

$$AP^2 + BP^2 + CP^2 = (\vec{x} - \vec{a})^2 + (\vec{x} - \vec{b})^2 + \vec{x}^2 = 3\left[\vec{x} - \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b})\right]^2 + \frac{2}{3}(\vec{a} + \vec{b})^2.$$

当 $\vec{x} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b})$ 时， $AP^2 + BP^2 + CP^2$ 最小，此时，即

$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$ ，则点 P 为 $\triangle ABC$ 的重心.

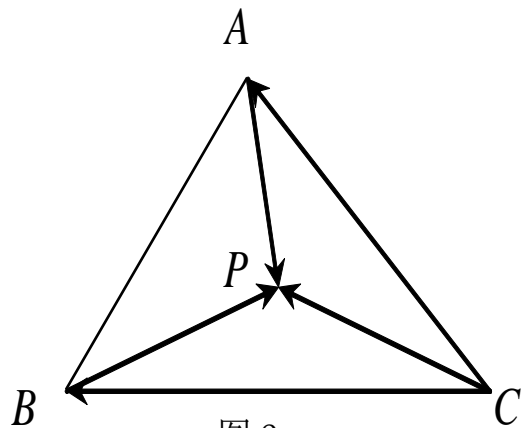
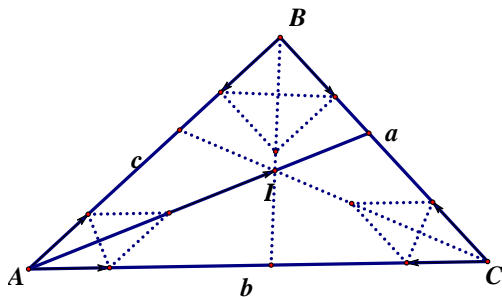


图2

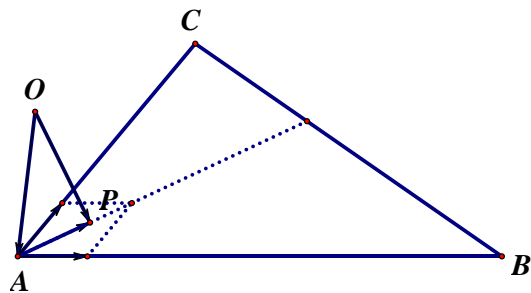
练 6 已知 I 为 $\triangle ABC$ 所在平面上的一点, 且 $AB=c$, $AC=b$, $BC=a$. 若

$a\vec{IA} + b\vec{IB} + c\vec{IC} = \vec{0}$, 则 I 是 $\triangle ABC$ 的()

- . A. 重点 B. 外心 C. 内心 D. 垂心



图(5)



图(6)

【解析】 $\because \vec{IB} = \vec{IA} + \vec{AB}$, $\vec{IC} = \vec{IA} + \vec{AC}$, 则由题意得 $(a+b+c)\vec{IA} + b\vec{AB} + c\vec{AC} = \vec{0}$,

$$\therefore b\vec{AB} + c\vec{AC} = -\vec{IA} = |\vec{AC}| \cdot \frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|} + |\vec{AB}| \cdot \frac{\vec{AC}}{|\vec{AC}|} = |\vec{AC}| \cdot |\vec{AB}| \cdot \left(\frac{\frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|}}{|\vec{AC}|} + \frac{\frac{\vec{AC}}{|\vec{AC}|}}{|\vec{AB}|} \right),$$

$$\therefore \vec{AI} = \frac{bc}{a+b+c} \left(\frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|} + \frac{\vec{AC}}{|\vec{AC}|} \right). \because \frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|} \text{ 与 } \frac{\vec{AC}}{|\vec{AC}|} \text{ 分别为 } \vec{AB} \text{ 和 } \vec{AC} \text{ 方向上的单位向量, } \therefore$$

\vec{AI} 与 $\angle BAC$ 平分线共线, 即 AI 平分 $\angle BAC$.

同理可证: BI 平分 $\angle ABC$, CI 平分 $\angle ACB$. 从而 I 是 $\triangle ABC$ 的内心, 如图(5).

谢谢

